# Bourdon

**1-a)** On applique le th du moment cinétique à Bourdon ∪ la corde.

- masse corde négligeable → $\sigma_\Delta = \sigma_{Bourdon} = J\ddot{\theta}$

soumis à

- $\vec{F}$ de moment $+FR$ (bras de levier)
- poids de moment $-m_B g\, d\sin\theta$
- réaction de l'axe de moment nul sans frottement

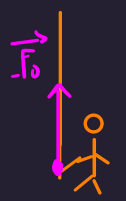
$$J_B\ddot{\theta} = FR - mg\,d\sin\theta \underset{\text{équilibre}}{=} 0$$

**1-b)**

$$\boxed{d = \frac{F_0 R}{m_B g \sin\theta}}$$

$F_0 \to 3{,}7\cdot10^3$ ; $R \to 0{,}5$ ; $m_B \to 10^3$ ; $g \to 9{,}8$ ; $\sin\theta \to \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{d = 70\ \text{cm}}$$

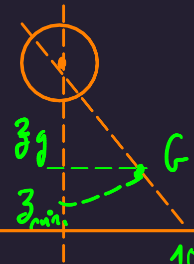



Action réciproques : l'individu est soumis à une $-\vec{F_0}$ avec $F_0 \gg m_i g$ → il décolle.

**2a)** Théorème de l'énergie mécanique appliqué au Bourdon ∪ corde. La seule force qui travaille est le poids, avec

$\mathcal{E}_p = mg(z_G - z_{min})$ avec $z_{min} = z_G$ en $\theta = 0$

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2$




$z_g - z_{min} = d(1-\cos\theta)$.

Conservation de $E_m$ :

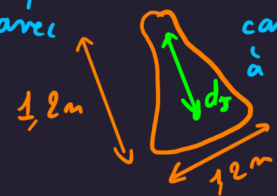
$\theta = \theta_0$ ; $\theta = 0$ (où $\dot{\theta}_{max}$)

$$0 + m_B g d(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 + 0$$

$$\boxed{J_B = \frac{2\, m_B g d(1-\cos\theta_0)}{\omega_0^2} = 6{,}0\cdot10^2\ \text{kg m}^2}$$

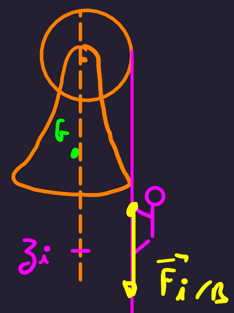
$m_B \to 10^3$ ; $g \to 9{,}8$ ; $d \to 0{,}7$ ; $\theta_0 \to 45°$ ; $\omega_0 \to 2{,}6$

**2-b)** On calcule $\boxed{\sqrt{\frac{J_B}{m_B}} = 7{,}7\cdot10^1\ \text{cm} \equiv d_J}$. $J_B$ est le même que pour 1 objet ponctuel de masse $m_B$, placé à $d_J$ de l'axe. Compatible avec

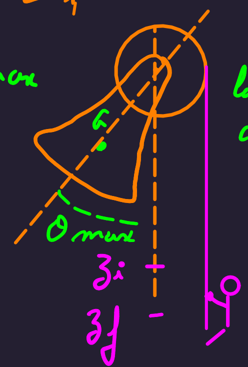



car toute la masse est à moins de $\sqrt{(1,2)^2 + 0,6^2} = 1,3$ m de l'axe.

**3a)** à $t=0$ ; $\theta = 0$




à $\theta = \theta_{max}$




Conservation de la longueur de la corde

$z_i - z_f = R\theta_{max}$

Th. de l'énergie mécanique au bourdon + corde

$\theta = 0$ ; $\dot{\theta} = 0$

$E_{m_B} = 0 + 0$

$\theta = \theta_{max}$ ; $\dot{\theta} = 0$

$E_{m_B} = 0 + m_B g d(1-\cos\theta)$

$\Delta E_{m_B} = $ travail de $\vec{F}_{i/B}$

Th de l'énergie mécanique à $m_i$.

$\theta = 0$, $z = z_i$, $\dot z = 0$ : $\mathcal{E}_{m_i} = m_i g z_i$

$\theta = \theta_{max}$, $z = z_f$, $\dot z = 0$ : $\mathcal{E}_{m_i} = m_i g z_f$

$\Delta \mathcal{E}_m$ = travail de $+\vec{F}_{B/} = -\vec{F}_{/B}$

$\Delta \mathcal{E}_{m_i} = -\Delta \mathcal{E}_{mB} \rightarrow \mathcal{E}_{m_i} + \mathcal{E}_{mB} = cst$ ← à réutiliser

$$\boxed{m_B g d(1-\cos\theta_{max}) = m_i g (z_i - z_f) = m_i g R\theta_{max}}$$

3b) On a $\frac{1-\cos\theta_{max}}{\theta_{max}} = \frac{m_i R}{m_B d} \ll 1 \rightarrow \theta_{max} \ll 1$

$1-\cos\theta_{max} \approx \frac{\theta_{max}^2}{2}$ ($\theta \ll 1$) $\rightarrow$

$$\boxed{\theta_{max} \approx \frac{2 m_i R}{m_B d} = 0{,}13 \text{ rad} = 7{,}2°}$$

(75 ; 0,5 ; $10^3$ ; 0,7)

4a) Le problème est le même : force constante sur la corde égale à $\frac{m_i g}{2}$. $\theta'_{max} = \frac{m_i R}{m_B d}$.

Travail reçu par le bourdon : $\Delta \mathcal{E}_{mB} = m_B g d(\underbrace{1-\cos\theta'_{max}}_{\approx \theta'^2_{max}/2})$

$$\boxed{= W_{tract} \approx \frac{m_B g d}{2}\left(\frac{m_i R}{m_B d}\right)^2 = \frac{g m_i^2 R^2}{2 m_B d} = 98 \text{ J}}$$

(9,8 ; 75 ; 0,5 ; $10^3$ ; 0,7)

$W_{traction} = F\,\ell$ ← longueur de traction ($F = m_i g/2$)

$$\boxed{\ell = \frac{W}{F} = \frac{m_i R^2}{2 m_B d} = 1{,}3 \text{ cm}}$$

↑ c'est aussi $R\theta'_{max}$

4b) Quand l'individu a lâché la corde, mouvement conservatif du bourdon.

$\theta = \theta'_{max}$, $\dot\theta = 0$ ; $\theta$, $\dot\theta$ } quelconques

$\mathcal{E}_{mB} = m_B g d(1-\cos\theta'_{max}) = \mathcal{E}_{mB} = m_B g d(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} J_B \dot\theta^2$

DL pour $\theta \ll 1$, $\theta'_{max} \ll 1$

$\frac{1}{2} J_B \dot\theta^2 + m_B g d \frac{\theta^2}{2} = m_B g d \frac{\theta'^2_{max}}{2}$ ; $\dot\theta^2 + \Omega^2\theta^2 = cst$, avec

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{m_B g d}{J_B} = \frac{g d}{d_J^2}}$$

(9,8 ; 70 ; 77)

Oscillations harmoniques entre $\theta = 0$ et $\theta'_{max}$, il repasse en $\theta = 0$ au bout de

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}8 \text{ s}}$$

4c) On veut atteindre $\mathcal{E}_{mB} = m_B g d(1-\cos\theta_0)$ en ajoutant $n$ fois $W_{tract} = \frac{g m_i^2 R^2}{2 m_B d}$.

$n = \frac{\mathcal{E}_{mB}}{W_{tract}} = \frac{2 m_B^2 d^2}{m_i^2 R^2} = 7{,}0 \cdot 10^2$

↑ nb de ½ oscillations. Chaque oscillation dure $\geq \frac{T_0}{2}$

car leur période augmente avec l'amplitude. $\frac{J_B}{m_B}$ = 76 cm

Durée totale $T \geq \frac{n}{2} T_0 = \frac{n\pi}{\omega} = \left(\frac{m_B d}{m_i R}\right)^2 \frac{\pi d_J}{\sqrt{g d}}$

(70 cm ; 9,8 ; $10^3$ ; 75 ; 0,5 ; 0,7)

$= 5{,}3$ min

On aura intérêt à utiliser davantage de sonneur·r·se·s pour augmenter la force et diminuer la durée

5a) Travail élémentaire pour une rotation de $d\theta$


$$\delta W_f = \ominus k\dot{\theta}^2 |d\theta|$$

$\delta f$ résistif

$(\delta W < 0$ pour $\begin{cases} d\theta < 0 \\ d\theta < 0 \end{cases}$

En négligeant l'effet de $\delta f$ sur $1\frac{1}{2}$ oscillation

$$W_f = -\int_{-\theta_f}^{\theta_f} k\dot{\theta}^2 \, d\theta \quad \text{car } d\theta > 0$$

et $\begin{cases} \text{en } -\theta_f \\ Em_B = 0 + m_B g d(1-\cos\theta_f) \\ \text{en } \theta \\ Em_B = \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 + m_B g d(1-\cos\theta) \end{cases}$

donc

$$\frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 = m_B g d(\cos(\theta) - \cos(\theta_f)) \quad \text{soit} \quad W_f = -k\int_{\theta_f}^{\theta_f} \frac{2 m_B g d(\cos(\theta) - \cos(\theta_f))}{J_B} d\theta$$

$$W_f = -\frac{2kgd}{d_J^2}\left(2\sin\theta_f - 2\theta_f\cos(\theta_f)\right) = \boxed{-\frac{4kgd}{d_J^2}\left(\sin\theta_f - \theta_f\cos(\theta_f)\right)}$$

5b) Pour entretenir le mouvement sur $[-\theta_f \; \theta_f]$, on doit avoir sur $1\frac{1}{2}$ oscillation $\Delta Em = 0 = W_f + W_{traction}$

$$\frac{\cancel{g} m_i^2 R^2}{2 m_B d} = \frac{4k\cancel{g}d}{d_J^2}\left(\sin\theta_f - \theta_f\cos\theta_f\right)$$

$$\boxed{K = \frac{\overset{75}{m_i}{}^2 \overset{0,5}{R}{}^2 \overset{0,76}{d_J}{}^2}{8 \underset{10^3}{m_B} \underset{0,7}{d}{}^2 (\sin\underset{35}{\theta_f} - \theta_f\cos\theta_f)} = 2,8 \text{ kg m}^2}$$